

Eesti koolinoorte LV täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA KOOLIVOOR

Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.

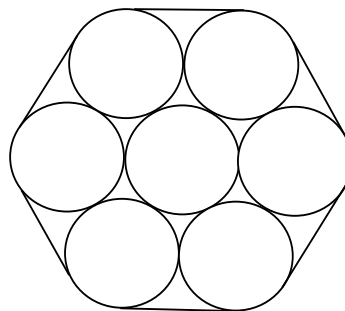
X klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Antud on seitsmekohaline naturaalarv $N = \overline{13ab45c}$. Määra numbrid a , b ja c nii, et arv N jaguks arvuga 792.
2. Veoauto sõidab linnast A linna B. Tunni aja pärast järgneb veoautole sõiduauto ning linna B jõuavad veo- ja sõiduauto üheaegselt. Kui veoauto ja sõiduauto väljuksid vastavalt linnadest A ja B samaaegselt teineteisele vastu, siis kohtuksid nad 1 tunni ja 12 minuti pärast. Leia aeg, mis kulub veoautol sõiduks linnast A linna B.
3. Leia sellised parameetri k väärtused, mille korral on ruutfunktsiooni $y = 2x^2 + (k - 9)x + k^2 + 3k + 4$ vähim väärtus võrdne nulliga.
4. Seitse võrdse raadiusega ringi on joonisel näidatud viisil piiratud joonega. Leia, kui suure osa moodustab ringide pindalade summa kogu joonega piiratud kujundi pindalast.



5. Ühikkuupidest pannakse kokku kolmemõõtmeline kujund, kusjuures kuu-
pide ühendamisel peavad nende tahud ühtima. Kas selle kujundi pinna pind-
ala saab olla
 - a) 2007;
 - b) 2008?

LAHENDUSED

1. Vaatleme arvu 792. Et $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 = 8 \cdot 9 \cdot 11$, siis on 8, 9 ja 11 arvu N positiivseteks jagajateks. Arvude 8, 9 ja 11 jaguvustunnuseid järgnevas kasutamegi.

$$N = \overline{13ab45c}$$

Et täisarv N jagub 8-ga juhul, kui tema kolmest viimasest numbrist moodustatud kolmekohaline arv jagub 8-ga, siis peab

$$\overline{45c} : 8 .$$

Ainus võimalus on $456 : 8 = 57$. Niisiis $c = 6$.

$$N = \overline{13ab456}$$

Arv jagub 9-ga, kui tema numbrite summa jagub 9-ga. Arvu N numbrite summast

$$1 + 3 + a + b + 4 + 5 + 6 = a + b + 19$$

ilmneb, et on vaid kaks võimalust: $a + b = 8$ (ristsumma 27) või $a + b = 17$ (ristsumma 36).

Viimaks kasutame 11-ga jaguvuse tunnust: arvu paaritutel kohtadel asuvate numbrite ja paariskohtadel asuvate numbrite summade vahe peab jaguma 11-ga. Niisiis peab

$$(1 + a + 4 + 6) - (3 + b + 5) = a - b + 3$$

jaguma 11-ga. Ka siin on kaks võimalust:

$$a - b + 3 = 0 \text{ või } a - b + 3 = 11$$

Seega saame 9-ga ja 11-ga jaguvuse tunnustest 4 võrrandite süsteemi.

- 1) $\begin{cases} a + b = 8 \\ a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 2,5$ (ei sobi, sest a on number)
- 2) $\begin{cases} a + b = 8 \\ a - b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 8 \Rightarrow b = 0$ (sobib, sest $1380456 : 792 = 1743$)
- 3) $\begin{cases} a + b = 17 \\ a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 7 \Rightarrow b = 10$ (ei sobi, sest b on number)
- 4) $\begin{cases} a + b = 17 \\ a - b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 12,5$ (ei sobi, sest a on number)

Otsitud seitsmekohaline arv on 1 380 456.

2. Olgu vahemaa linnast A linna B s km ning veoauto kiirus $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Sellisel juhul kulub veoautol vahemaa AB läbimiseks $\frac{s}{v}$ tundi ning sõiduautil $\frac{s}{v} - 1$ tundi. Sõiduauto kiirus on eelnevat arvestades $\frac{s}{\frac{s}{v} - 1} \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Et $1\frac{1}{5}$ tunniga läbisid veo- ja sõiduauto kokku s km, siis saame võrrandi

$$\frac{6}{5} \cdot \left(v + \frac{s}{\frac{s}{v} - 1} \right) = s$$

Saadud võrrandi pooli jagame suurusega $v > 0$.

$$\frac{6}{5} \cdot \left(1 + \frac{\frac{s}{v}}{\frac{s}{v} - 1} \right) = \frac{s}{v}$$

Olgu $\frac{s}{v} = t$ (mis ongi parajasti veoauto aeg), siis tekib ruutvõrrand

$$\frac{6}{5} \cdot \left(1 + \frac{t}{t-1} \right) = t \Rightarrow \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{t-1+t}{t-1} \right) = t \Rightarrow 12t - 6 = 5t^2 - 5t$$

$$5t^2 - 17t + 6 = 0, \text{ mille}$$

lahendid on $t_1 = 0,4$ ja $t_2 = 3$. Vastavalt ülesande tingimustele kulub veoautol vahemaa AB läbimiseks üle ühe tunni. Niisiis sobib ülesande lahendiks vaid $t = 3$.

Kontroll.

Kui veoautol kulub vahemaa läbimiseks 3 tundi, siis sõiduautil kulub 2 tundi ning nende kiirused oleksid vastavalt $\frac{s}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja $\frac{s}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kokku läbiksid

nad $1\frac{1}{5}$ tunniga $\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{s}{3} + \frac{s}{2} \right) = \frac{6}{5} \cdot \frac{5s}{6} = s$ (km). Sobib tekstiga.

Veoautol kulub linnast A linna B sõitmiseks 3 tundi.

3. $y = 2x^2 + (k-9)x + k^2 + 3k + 4$

Kuna ruutfunktsiooni ruutliikme kordaja $2 > 0$, siis funktsiooni graafikuks on ülespoole avanev parabool ja funktsiooni vähim väärtus on võrdne parabooli haripunkti ordinaadiga.

Kuna vähim väärtus peab olema null, siis asub haripunkt abstsissiteljel. Ruutparabooli haripunkt asub x-teljel ehk vastava ruutfunktsiooni nullkohad on võrdsed parajasti siis, kui ruutvõrrandi diskriminant on null. Seega saame parameetri k määrata ruutvõrrandi $(k-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 + 3k + 4) = 0$ lahenditena.

$$k^2 - 18k + 81 - 8k^2 - 24k - 32 = 0$$

$$-7k^2 - 42k + 49 = 0 \quad | :(-7)$$

$$k^2 + 6k - 7 = 0$$

$$k_1 = 1; \quad k_2 = -7$$

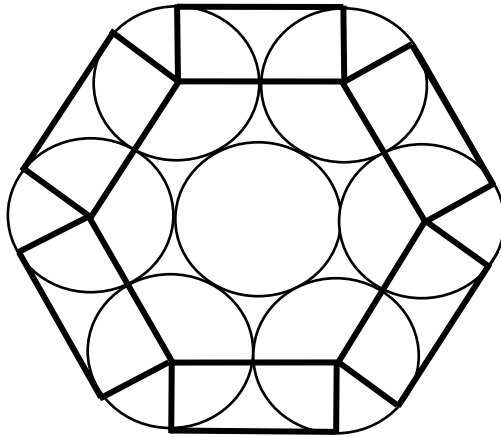
Kontroll.

Kui $k = 1$, siis saame ruutfunktsiooni $y = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x-2)^2$. Kuna ruudu omadust arvestades $2(x-2)^2 \geq 0$, siis on ülesande tingimused täidetud.

Kui $k = -7$, siis saame ruutfunktsiooni $y = 2x^2 - 16x + 32 = 2(x-4)^2$. Kuna ruudu omadust arvestades $2(x-4)^2 \geq 0$, siis on ülesande tingimused täidetud.

Parameetri k väärtuseks on kas 1 või -7.

4. Teen abistava joonise. Olgu ringi raadius r .



Antud kujund koosneb järgmistest osadest (vt joonist):

1) korrapärane kuusnurk, mille külje pikkus on $2r$;

2) kuus 60° kesknurgaga sektorit;

3) kuus ristikülikut külgedega r ja $2r$.

Korrapärase kuusnurga pindala on $6r^2\sqrt{3}$, kuue sektori pindala πr^2 ja kuue ristiküliku pindala $12r^2$.

Kogu kujundi pindala

$$S = 6r^2\sqrt{3} + \pi r^2 + 12r^2 = r^2(\pi + 12 + 6\sqrt{3}).$$

$$\text{Küsitud osa } \frac{7\pi r^2}{r^2(\pi + 12 + 6\sqrt{3})} = \frac{7\pi}{\pi + 12 + 6\sqrt{3}} (\approx 86,1\%)$$

$$\text{Ringide pindalade summa on kujundi pindalast } \frac{7\pi}{\pi + 12 + 6\sqrt{3}}.$$

5.

- a) **Ei.** Ühikkuubil on 6 tahku, seega tema pinna pindala on 6 ehk paarisarv. Kui võtta mitu ühikkuupi, siis neil on tahkude koguarv samuti paarisarv. Mõned tahud aga ei moodusta kujundi pinda. Paneme tähele, et kui ühe ühikkuubi tahk on kasutatud kahe ühikkuubi ühendamiseks, siis selleks on kasutatud üks tahk ka teisel ühikkuubil. Näeme, et ühikkuupide moodustamiseks kasutatud tahkude arv on paarisarv. Kujundi pinna pindala väljendub seega alati kahe paarisarvu vahena. Paarisarvude vahe on aga paarisarv. Seega ei saa kujundi pindala olla 2007.
- b) **Jah.** Selline kujund leidub. Sobib näiteks risttahukas $1 \times 4 \times 200$ või risttahukas $1 \times 1 \times 1000$, mille peale on pandud veel 3 ühikkuupi. On võimalik tuua ka teisi näiteid.

HINDAMINE

- | | |
|--|-----------------|
| 1. 8-ga jaguvuse kasutamise eest | 1p |
| 9-ga jaguvuse kasutamise eest | 1p |
| 11-ga jaguvuse kasutamise eest | 2p |
| Lahenduse tehnilise lõpuleviimise eest | 3p |
| <u>Märkus.</u> 2-ga, 3-ga ja 4-ga jaguvuse tunnused viivad variantide liigsele rohkusele. Viitamine 2-ga ja 3-ga jaguvusele annab 1p, vastavate seoste väljakirjutamine veel 1p. 4-ga jaguvuse kasutamine annab 2p. Ükskõik kuidas õpilane ka variantidega ei kombineeriks, ilma tehnilise teostuseta mitte anda üle 4p. | <hr/> 7p |
| 2. Muutujate tähistamise eest | 1p |
| Võrrandi (või ka süsteemi) koostamise eest | 3p |
| Võrrandi (või ka süsteemi) lahendamise eest | 2p |
| Kontroll | 1p |
| <u>Märkus.</u> Ainult õige vastuse eest 1p | <hr/> 7p |
| 3. Selgitus, et funktsiooni vähim väärtus asub haripunktis | 1p |
| Selgitus või mõistmine, et diskriminant peab võrduma nulliga | 2p |
| Vastava võrrandi koostamine | 1p |
| Parameetri k väärtuste leidmine | 1p |
| Parameetri väärtuste kontroll | 2p |
| <u>Märkus.</u> Võrrandini võib jõuda näiteks Viet`i teoreemi või haripunkti x -koordinaadi valemit kasutades. Võrrandi koostamise eest igal juhul 4p.
Ainult täielikult õige vastuse eest 1p. | <hr/> 7p |
| 4. Kujundi jaotamine tuttavateks alamkujunditeks | 3p |
| Kujundi pindala leidmise eest | 2p |
| Seitsme ringi pindala leidmise eest | 1p |
| Vastava suhte leidmise eest | 1p |
| | <hr/> 7p |
| 5. a) osa tõestus | 4p |
| b) osa tõestus | 3p |
| | <hr/> 7p |

Märkus. Ainult täieliku õige vastuse eest (a-osa "ei" ja b-osa "jah")

ilma selgituseta anda 1p. Ainult ühe osa õige vastuse eest anda 0p. Teise osa lahenduses on konkreetse näite toomine kohustuslik. Ilma näiteta lahenduse eest anda 1p.